però va tenir una distribució molt reduïda. Leibniz, per exemple, es va assabentar de la seva existència a través de Johann Bernoulli, que n'havia rebut una còpia d'un nebot que havia estata París. Leibniz va contestar el *Commercium Epistolicum* mitjançant la *Charta Volans*, una carta anònima, que va ser distribuïda pel continent i que es va publicar a *Acta Eruditorum*, en la qual Newton era acusat d'haver plagiat Leibniz després que aquest últim li hagués comentat el seu mètode diferencial a les cartes de resposta a aquelles cartes encriptades que Newton li havia enviat el 1676 en què es parlava del mètode de les fluxions. Newton, enfurismat, va contestar la *Charta Volans* escrivint un llarg relat de com, segons ell, havia anat tot l'assumpte de la creació del càlcul, relat que va inserir en una ressenya que va escriure del *Commercium Epistolicum* i es va publicar al *Philosophical Transactions* del 1715. En aquell moment Leibniz va decidir escriure com havia anat la creació del càlcul diferencial, en la *Historia et origo calculi differentialis*, que no es va publicar fins molts anys després de la seva mort, que va tenir lloc el mateix any 1716, en què escrivia la història i l'origen del càlcul diferencial.

La polèmica va continuar al llarg del segle XVIII i durant aquest segle la societat matemàtica va quedar dividida irremeiablement entre britànics seguidors del càlcul fluxional i continentals seguidors del càlcul diferencial.

Leibniz va morir el 13 de novembre de 1716, tenia 70 anys. A l'enterrament no hi va assistir cap representant de la cort.

Deixava escrits molts articles sobre tota mena de temes, molts manuscrits, nombrosos esborranys i alguns llibres i, a més, una quantitat aclaparadora de cartes (unes deu mil); a banda, hi havia les cartes rebudes (deu mil més). Un llegat que encara avui s'estudia.

Referències

[1] J. Aiton. «Leibniz. Una biografía» (1985), Alianza Editorial.

[2] A.J. Durán. «La polémica sobre la invención del cálculo infinitesimal». (2006), Ed. Crítica.

[3] C.H. Edwards. *The Historical Development Of The Calculus*. Springer-Verlag (1979).

Problemes

Carles Romero, Juanjo Rué
IES Manuel Blancafort, la Garriga, UPC

Teniu a les mans una nova sessió de problemes de la *SCM/Notícies*, aquest cop amb alguns canvis, començant amb una edició a quatre mans de la secció.

Carles Romero: Efectivament, la vida segueix, però els actors van canviant. Aquestes ratlles són, en primer lloc, per donar la benvinguda a Juanjo Rué, responsable d'aquesta secció de problemes de la *SCM/Notícies* a partir d'ara mateix. I, després, per acomiadar-me d'aquesta feina, que va traspassar-me Pelegrí Viader, ara fa disset anys i 25 números de la revista!
Ara, doncs, toca mostrar el meu agraïment a tots els que hi heu contribuït, sigui amb propostes de problemes, sigui amb solucions i, també, a la Societat Catalana de Matemàtiques, que m'ha proporcionat els mitjans i la satisfacció de poder portar a terme aquesta tasca.
Gràcies a tothom!

Juanjo Rué: Primer de tot, agrair a en Carles i a l'equip editorial de la *SCM/Notícies*, tant el pas del testimoni com la confiança mostrada. En tot cas, espero poder fer, ni que sigui, la meitat de bona feina que en Carles ha estat fent durant tantes i tantes edicions de la revista, tot encarregant-se de tants i tants problemes que ens han entretingut molt en els últims anys.

Anem, doncs, a les matèmatiques. Hem rebut solucions per a tots els problemes proposats en el número anterior. En especial, agraïm el treball fet per Miquel Amengual Covas de Cala Figuera, a Mallorca; per Esteve Casas, de l'Institut Baix Montseny, a Sant Celoni, i per Joaquim Nadal i Vidal, de Llagostera, a la Selva. Ha costat triar d'entre totes les seves solucions, totes elles molt originals.

Per aquest nou número tenim quatre nous problemes: dos de geometria (proposats per Miquel Amengual Covas i Joaquim Nadal i Vidal), un de desigualtats (proposat per José Luis Díaz–Barrero) i un de caire aritmètic i combinatori proposat per l'editorial. Agraïm a tots ells la seva contribució, que ens farà gaudir a tots d'uns bons enigmes matemàtics.

Per acabar, una mica de nova informació de contacte: per col·laborar en aquesta secció (tant proposant com solucionant problemes), el nou correu electrònic per a enviaments és:

`juan.jose.rue@upc.edu`.

Agraïrem efusivament els materials escrits en TEX o LaTEX que incloguin els fitxers `*.tex` font i les figures corresponents. Ara toca engrescar-se amb la nova llista de problemes!

Problemes proposats

A141. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal. Llagostera. Girona.)

En un triangle $\triangle ABC$ traceu (mitjançant regla i compàs) una recta paral·lela l a la base BC que talli els costats AB i AC en els punts D i E, respectivament, tal que $BD + CE = BC$.

A142. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC BarcelonaTech, Barcelona.)

Siguin a, b dos nombres reals positius. Demostreu que:

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{b}}\right) + \\ + \sqrt{\frac{a(1+\sqrt{b})^2 + b(1+\sqrt{a})^2}{ab + (1+\sqrt{a})^2(1+\sqrt{b})^2}} < 1.$$

A143. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui $\triangle ABC$ un triangle tal que $\widehat{BAC} > 90°$. Siguin D, E punts sobre el segment BC, de manera que $AD \perp AC$ i $AE \perp AB$. Sigui H el peu de la perpendicular de A a BC. Suposant que:

$$\frac{1}{BD} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{AH},$$

determineu l'angle $\widehat{BAC}$.

A144. (Proposat per l'editorial.)

Sigui A un conjunt de nombres enters positius. Definim la funció $R_A(n)$ com el nombre de solucions de l'equació $n = x + y$ amb x, $y \in A$ i $x \leq y$. Demostreu que si A és infinit aleshores, per n suficientment gran, $R_A(n)$ no pot ser una funció constant.

Solucions

A137. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

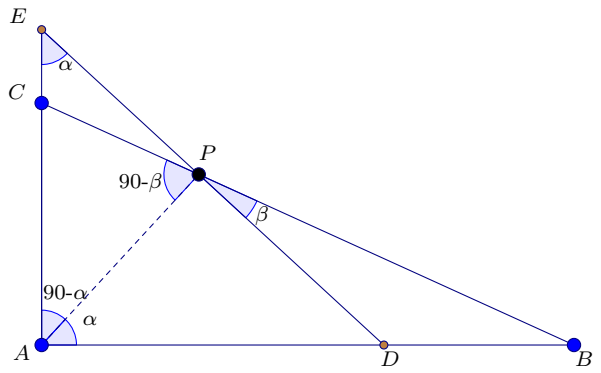
Sigui P un punt del costat BC d'un triangle $\triangle ABC$. La recta perpendicular a AP per P talla AB i CA en els punts D i E, respectivament.

1) Demostreu que si $\widehat{BAC} = 90°$, aleshores $\frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE} = \frac{BP}{PC}$.

2) Si es compleix que $\frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE} = \frac{BP}{PC}$, proveu o refuseu que $\widehat{BAC} = 90°$.

Solució: (Solució d'Esteve Casas, Institut Baix Montseny, Sant Celoni.)

Escrivim $\alpha = \widehat{AEB} = \widehat{PAB}$, $\beta = \widehat{CDE} = \widehat{DPB}$, amb la qual cosa la figura que hem d'estudiar és la següent:



És clar que els triangles rectangles $\triangle DPA$, $\triangle APE$ i $\triangle DAE$ són semblants. Aplicant el teorema del sinus al triangle $\triangle APC$ obtenim el següent:

$$\frac{PC}{\sin(90-\alpha)} = \frac{CA}{\sin(90-\beta)} \Longrightarrow \frac{PC}{\cos(\alpha)} = \frac{CA}{\cos(\beta)}. \tag{1}$$

Apliquem ara el teorema del sinus al triangle $\triangle ABP$, i tenim que:

$$\frac{PB}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\sin(90+\beta)} \Longrightarrow \frac{PB}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\cos(\beta)}. \tag{2}$$

Per tant, de les equacions (1) i (2) en deduïm el següent:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{CA} \cdot \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}. \tag{3}$$

Ara bé, treballant amb el triangle rectangle $\triangle APE$, $\frac{AP}{AE} = \sin(\alpha)$. De manera anàloga amb el triangle rectangle $\triangle APD$, obtenim que $\frac{AD}{AP} = \frac{1}{\cos(\alpha)}$. És a dir:

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{AD}{AE} \tag{4}$$

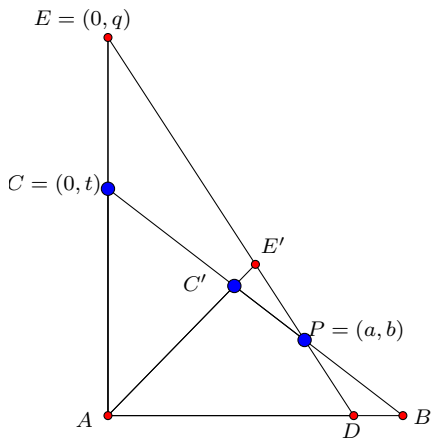
Finalment, substituint (4) en (3), obtenim el resultat buscat en l'apartat 1: $\frac{PB}{PC} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AE}$.

Vegem ara l'apartat 2 del problema. De fet, constatarem que la condició 90^0 no és necessària, ja que tobarem un contraexemple amb un triangle no rectangle. Per a aquest propòsit, analitzarem la configuració donada i en trobarem una de nova, que anomenarem $\triangle ABC'$, i que sense ser recta en $\widehat{BAC'}$ complirà la condició desitjada.

Comencem a partir d'un triangle $\triangle ABC$ que és recte en $\widehat{BAC}$. En coordenades, $A = (0,0)$ està situat a l'origen de coordenades, B sobre l'eix d'abscisses i C sobre l'eix d'ordenades. Escrivim $P = (a,b)$ $a \neq 0$, que està situat sobre el costat BC. Per tant, l'equació de la recta r_1 que passa pels vèrtexs B i C és, per a determinat valor m, $y = mx + b - ma$. La recta r_2 perpendicular al segment AP i que passa per P tindrà una equació amb la forma següent: $ax + by - (a^2 + b^2) = 0$. Per abreujar les expressions fem $q = \frac{a^2+b^2}{b}$ i $t = b - ma$, amb els quals el punt C intersecció de r_1 i l'eix d'ordenades serà $C = (0,t)$ i el punt E intersecció de la recta r_2 i l'eix d'ordenades serà $E = (0,q)$.

Sabem per l'apartat 1 que en el triangle rectangle $\triangle ABC$ es compleix $\frac{AD \cdot AB}{AC \cdot AE} = \frac{PB}{PC}$. Considerem ara els punts C', entre C i P i sobre el segment CP, i E' sobre la prolongació del segment AC' i sobre el segment PE, de tal manera que el triangle ABC', sense ser rectangle, compleixi les condicions $\frac{AD \cdot AB}{AC' \cdot AE'} = \frac{PB}{PC'}$. Veurem que aquests punts existeixen.

De fet, la configuració a estudiar és la següent:



Denotem $C' = (1-\lambda)C + \lambda P = (\lambda a, (1-\lambda)t + \lambda b)$ i $E' = \mu C' = (1-\gamma)E + \gamma P$, amb μ i γ que s'han de trobar.

Resolent el sistema d'equacions obtingut de fer $\mu C' = (1-\gamma)E + \gamma P$ obtenim que $\mu\lambda a = \gamma a$ i $\mu(t + \lambda(b-t)) = q + \gamma(b-q) = q + \mu\lambda(b-q)$. Per tant, simplificant, en resulta que $\mu\lambda = \gamma$ i $\mu = \frac{q}{t+\lambda(q-t)}$, amb la qual cosa:

$$E' = \mu C' = \frac{q}{t+\lambda(q-t)}(\lambda a, t + \lambda(b-t)).$$

A més, s'ha de complir la condició: $\frac{AC' \cdot AE'}{PC'} = \frac{AC \cdot AE}{PC} = \frac{t \cdot q}{\sqrt{a^2+(b-t)^2}}$.

Desenvolupant les expressions per als valors de AC', AE' i PC' obtenim:

$$\frac{AC' \cdot AE'}{PC'} = \frac{q}{\sqrt{a^2+(t-b)^2}} \cdot \frac{(a^2+(b-t)^2)\lambda^2+2t(b-t)\lambda+t^2}{(1-\lambda)(t+\lambda(q-t))}.$$

Per tant:

$$t = \frac{(a^2+(b-t)^2)\lambda^2+2t(b-t)\lambda+t^2}{(1-\lambda)(t+\lambda(q-t))}.$$

Arribem, després d'un parell de passos, a l'equació següent de segon grau en la indeterminada λ:

$$((b+t)q-2bt)\lambda^2+t(2b-q)\lambda = 0.$$

Hi ha dues solucions: la solució $\lambda = 0$, corresponent a la ja coneguda del triangle rectangle, i l'altra que, després de canviar t i q per les seves expressions equivalents, ens dona:

$$\lambda = \frac{(a^2-b^2)(b-ma)}{ma(b^2-a^2)+2a^2b}.$$

Per tant, això demostra que no cal que l'angle $\widehat{BAC}$ sigui rectangle.
Com a exemple, podem particularitzar $a = 2$, $b = 1$, $m = -1$, obtenim com a punts $A = (0,0)$, $B = (3,0)$, $C = (0,3)$, $E = (0,5)$, $\lambda = \frac{9}{14}$, $C' = (9/7, 12/7)$ i $E' = (3/2, 2)$. En aquesta situació, el triangle és, doncs, $\triangle ABC'$; el costat del segment AC' mesura $\frac{15}{7}$, el costat del segment AB mesura 3 i el costat corresponent al segment BC' mesura $\frac{12}{7}\sqrt{2}$, que formen un triangle acutangle.

A138. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, Girona.)
En un triangle isòsceles l'ortocentre està sobre la circumferència inscrita. Trobeu-ne l'àrea, tot sabent que és igual al perímetre.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Designem per I, H, R i r l'incentre, l'ortocentre, el radi de la circumferència circumscrita i el radi de la circumferència inscrita, respectivament, d'un triangle $\triangle ABC$. Denotem per A, B i C els corresponents angles del triangle $\triangle ABC$. Amb aquesta notació, el quadrat de la distància entre I i H es pot escriure com

$$IH^2 = 2r^2 - 4R^2\cos(A)\cos(B)\cos(C) \qquad (5)$$

Òbviament, H està sobre la circumferència inscrita si es compleix $IH = r$. Tenint present (5), aquesta condició s'escriu:

$$r^2 - 4R^2\cos(A)\cos(B)\cos(C) = 0,$$

que és equivalent a:

$$\frac{r^2}{4R^2} = \cos(A)\cos(B)\cos(C).$$

Tenint ara present que $\frac{r}{4R} = \sin(\frac{A}{2})\sin(\frac{B}{2})\sin(\frac{C}{2})$, es té que

$$4\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)\sin^2\left(\frac{B}{2}\right)\sin^2\left(\frac{C}{2}\right) = \cos(A)\cos(B)\cos(C). \qquad (6)$$

Per tant, la condició (6) s'ha de complir perquè l'ortocentre d'un triangle arbitrari $\triangle ABC$ estigui sobre la circumferència inscrita.
D'ara endavant suposarem que $\triangle ABC$ és isòsceles amb $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \varphi$, on $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Aleshores, $\widehat{BAC} = 180° - 2\varphi$, per tant, $\frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90° - \varphi$. Si substituïm aquests valors a (6) obtindrem:

$$4\cos^2(\varphi)\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\cos(2\varphi)\cos^2(\varphi).$$

Atès que es compleix que $\cos(\varphi) \neq 0$, la igualtat anterior, dividida per $\cos^2(\varphi)$, serà la següent:

$$4\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \cos(2\varphi) = 0.$$

Usant la fórmula trigonomètrica de l'angle doble, obtenim l'equació quadràtica a $\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ següent:

$$12\sin^4\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 8\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) + 1 = 0,$$

que es pot escriure en la forma

$$\left(6\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1\right)\left(2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1\right) = 0,$$

i també (usant l'expressió del sinus de l'angle meitat) de la manera següent:

$$(2 - 3\cos(\varphi))\cos(\varphi) = 0.$$

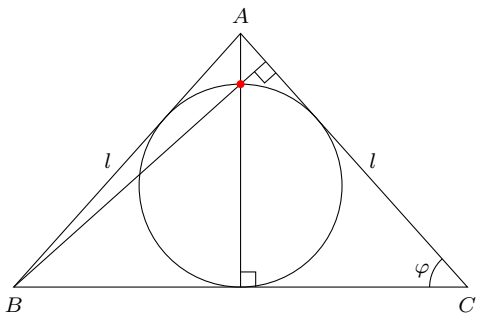
Com que $\cos(\varphi) \neq 0$ en resulta, per tant:

$$\cos(\varphi) = \frac{2}{3}. \qquad (7)$$

Suposem ara, a més, que l'àrea de $\triangle ABC$ és igual al perímetre. Com que l'àrea d'un triangle és igual a la meitat del producte de dos costats pel sinus de l'angle que formen, podem expressar l'àrea de $\triangle ABC$ en la forma

$$\frac{1}{2}l^2 \sin 2\varphi,$$

en la qual $l = AB = AC$ (vegeu la figura)



Igualem, ara, aquesta expressió amb la del perímetre. Tindrem, per tant:

$$\frac{1}{2}l^2 \sin(2\varphi) = 2l + 2l\cos(\varphi).$$

D'aquí n'hem d'aillar l:

$$l = \frac{4\,(1+\cos(\varphi))}{\sin(2\varphi)}.$$

Substituint-ho a l'expressió de l'àrea i substituint també $\cos(\varphi)$ per $\frac{2}{3}$ i $\sin(2\varphi)$ pel seu valor deduït de (7) $\left(\sin(2\varphi) = \frac{4\sqrt{5}}{9}\right)$, obtenim que l'àrea demanada és de $10\sqrt{5}$ unitats quadrades.

A139. (Proposat per José Luis Díaz–Barrero, BarcelonaTech, Barcelona.)

Siguin a_1, a_2, $\ldots$, a_n els n nombres positius definits recursivament mitjançant $a_1 = 2$ i $a_{m+1} = a_m + (a_m - 1)^2$, $m \geq 1$. Demostreu que:

$$2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}}\right)^2 < L_n L_{n+1}$$

en què L_n és l'n-èsim nombre **Lucas**, definit per la recursió $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ i, per a tot $n \geq 3$, $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$.

Solució: (Solució d'Esteve Casas, Institut Baix Montseny, Sant Celoni.)

Aplicarem el mètode d'inducció: els casos $n = 1$ i $n = 2$ són trivials. Suposem que la desigualtat és certa per a n, i veurem que també ho és per a $n+1$. Per tant, volem donar fites (en termes dels nombres de Lucas) de:

$$2 + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}}\right)^2 = 2 + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} + \frac{L_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)^2.$$

Usant la hipòtesis d'inducció, això ens porta a la desigualtat

$$2 + \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}}\right)^2 <$$
$$< L_n L_{n+1} + \frac{L_{n+1}^2}{a_{n+1}} + 2\frac{L_{n+1}}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}}.$$

Per tant, després de dividir per L_{n+1}, el que volem demostrar és que es compleix que:

$$L_n + \frac{L_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \leq L_{n+2}.$$

De manera equivalent, ja que $L_{n+2} - L_n = L_{n+1}$, la desigualtat anterior es tradueix en:

$$\frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \leq L_{n+1}\left(1 - \frac{1}{a_{n+1}}\right). \qquad (8)$$

Passarem a demostrar la desigualtat (8) per inducció. Novament, els casos $n = 1$ i $n = 2$ són trivials. Suposem que el resultat és cert per a $n-1$, és a dir, que es compleix que:

$$\frac{2}{\sqrt{a_n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \leq L_n\left(1 - \frac{1}{a_n}\right),$$

i veurem que el resultat també és cert per a n. L'anterior desigualtat implica la seqüència de desigualtats següent:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^{n} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} \\
&\quad = \frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} + \frac{2}{\sqrt{a_{n+1}}} \frac{L_n}{\sqrt{a_n}} \\
&\quad = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n+1}}} \frac{2}{\sqrt{a_n}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{L_k}{\sqrt{a_k}} + \frac{2L_n}{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}} \\
&\quad \leq \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{a_{n+1}}} L_n\left(1 - \frac{1}{a_n}\right) + \frac{2L_n}{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}} \\
&\quad = \frac{a_n}{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}} L_n\left(1 - \frac{1}{a_n}\right) + \frac{2L_n}{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}} \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}} L_n\,(a_n + 1)\,.
\end{aligned}$$

Ara demostrarem, per tant, que es compleix ladesigualtat següent:

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}}L_n\left(a_n+1\right)\leq L_{n+1}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

Ara bé, la successió a_n és estrictament creixent i, per tant:

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}}<\frac{1}{a_n}.$$

Així doncs, només cal demostrar que:

$$\frac{1}{a_n}L_n\left(a_n+1\right)\leq L_{n+1}\left(1-\frac{1}{a_{n+1}}\right),$$

que és equivalent a:

$$\frac{L_n}{a_n}+\frac{L_{n+1}}{a_{n+1}}\leq L_{n+1}-L_n=L_{n-1}.$$

Comprovem, doncs, que aquesta desigualtat és certa: si la n és més gran o igual que 3 tenim que $a_n\geq 7$, i per tant

$$\frac{L_n}{a_n}=\frac{L_{n-1}+L_{n-2}}{a_n}<\frac{2L_{n-1}}{7}<\frac{L_{n-1}}{2}.$$

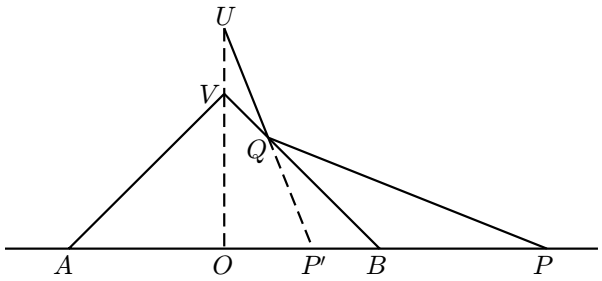
Pel que fa al terme $\dfrac{L_{n+1}}{a_{n+1}}$, es compleix que:

$$\frac{L_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{L_n+L_{n-1}}{a_n+(a_n-1)^2}<\frac{2L_n}{2a_n}<\frac{L_{n-1}}{2}.$$

Així doncs, es constata que $\frac{L_n}{a_n}+\frac{L_{n+1}}{a_{n+1}}<\frac{L_{n-1}}{2}+\frac{L_{n-1}}{2}=L_{n-1}$, tal com volíem demostrar.

A140. (Proposat per Joan Girbau, IEC, Barcelona.)

Considereu un con circular de manera que l'angle en el vèrtex entre una generatriu qualsevol i l'eix del con sigui de 45° i que la superfície del con sigui un mirall. Prengueu com a unitat de mesura el radi de la circumferència de la base. Col·loqueu aquest con sobre un pla, de manera que la seva base circular coincideixi amb una determinada circumferència c (de radi 1) d'aquest pla i situeu el vostre ull en un punt U molt a prop del vèrtex del con, mirant cap avall, en direcció perpendicular al pla (vegeu la figura).



El vostre ull veurà la regió exterior a c reflectida en el mirall i tindrà la sensació que la regió que veu és interior. Sigui ε la distància entre U i el vèrtex V del con. Sigui P un punt del pla exterior a la circumferència c i P' el punt on vosaltres el veureu. Siguin p i p' les distàncies respectives de P i de P' al centre O de la circumferència c de la base. Proveu que:

$$p'=\frac{1+\varepsilon}{p+\varepsilon}.$$

Observeu que quan el vostre ull s'apropa al vèrtex del con (quan ε tendeix a zero) la transformació que fa el mirall s'apropa a una inversió respecte a la circumferència c.

Solució: (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

El teorema de Menelau, aplicat al triangle $\triangle VOB$ i transversal UQP', dona:

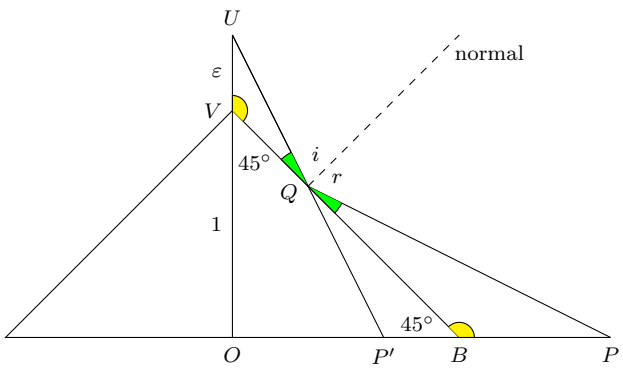
$$\frac{VU}{UO}\cdot\frac{OP'}{P'B}\cdot\frac{BQ}{QV}=1.$$

És a dir,

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\cdot\frac{p'}{1-p'}\cdot\frac{BQ}{QV}=1. \qquad (9)$$

D'altra banda, de la igualtat dels angles i (incidència) i r (reflexió), se'n dedueix la dels seus complementaris (vegeu la figura):

$$\widehat{VQU}=\widehat{PQB}.$$



I atès que $\widehat{UVQ} = \widehat{QBP}$ (ja que ambdós tenen el mateix angle suplementari (45°)), els triangles $\triangle UVQ$ i $\triangle PBQ$ són semblants. En resulta que:

$$\frac{BQ}{QV} = \frac{BP}{UV} = \frac{p-1}{\varepsilon}$$

Igualant ara l'expressió de $\frac{BQ}{QV}$ obtinguda de l'equació (9) amb la que acabem de trobar i multiplicant els dos membres per ε, tindrem:

$$\frac{(1+\varepsilon)(1-p')}{p'} = p-1.$$

D'aquí s'obté que $p' = \frac{1+\varepsilon}{p+\varepsilon}$, tal com es volia.

Matemots

Xavier Gràcia
Universitat Politècnica de Catalunya

Recordeu que es tracta d'un joc de llengua (vegeu l'article introductori al número 33 de la *SCM/Notícies*). Cal resoldre els enigmes lingüístics següents, a partir de la definició donada i les pistes incloses.

Exemple: «Matemàtic que refilava dins del paradís dels conjunts». La resposta és «Cantor»: «Ningú no ens podrà fer fora del paradís que Cantor ha creat», digué Hilbert sobre la teoria de conjunts. Cantor també és qui canta o refila.

Aquest número és una mica especial, ja que els enigmes no són estrictament de matemàtiques, sinó que estan vinculats a la **vida acadèmica** en general.

En cas de dubte podeu trobar-ne les respostes al peu de pàgina.[2]

1. Maldecaps per culpa de la llista d'exercicis (9 lletres).
2. Professor que apareix a la primera plana del diari (7 lletres).
3. Pot ser de teoria o de problemes, però la majoria és de la mitjana (6 lletres).
4. N'hi ha a les revistes, als currículums, i al codi penal (8 lletres).
5. Pot ser olímpic a Barcelona '92, central al PCUS, i organitzador en tots els congressos (6 lletres).
6. Assaig acadèmic que permet distingir una dona d'un home (6 lletres).
7. Explicà els seus problemes perquè li acceptessin l'article (6 lletres).
8. Material tèxtil d'ús obligat a les editorials de matemàtiques (5 lletres).

[2] Respostes als Matemots: 5. comité; 1. problemes; 8. látex; 4. articles; 2. titular; 7. referí; 3. classe; 6. tesina.